COLEGIO JOSÉ MARÍA MORELOS PAVÓN
SECCIÓN PREPARATORIA
CICLO ESCOLAR 2017 – 2018

Guía Extraordinario MATEMÁTICAS 4

Parte 1
REGLA DE RUFFINI

Ejemplo: $x^4+6x^3+x^2-24x+16$

El posible valor de "a" deber ser divisor del término independiente es este caso 16
16 tiene por divisor 1,2,3,4,8,16. cualquiera de ellos puede ser el que haga cero la expresión
Para dividir en forma sintética, tomamos los coeficientes del polinomio y dividimos para los divisores de 16.

Probamos con 2: Si $x^4+6x^3+x^2-24x+16$, Sus coeficientes en orden son:

1	6	1	-24	16	2
	2	16	34	20	
1	8	17	10	36	NO

1. Bajas el primer cociente y multiplicas por el divisor. Ubicas bajo el 2do.cociente para sumar o restar según sea el caso

2. Multiplicas por el divisor y ubicas bajo el 3er.coeficiente y asi sucesivamente hasta terminar todos los coeficientes

1	6	1	-24	16	-4
	-4	-8	28	-16	
1	2	-7	4	0	SI

Coeficientes resultantes

$(x^3+2x^2-7x+4)\ (x+4)$

3. Compruebas que la operación con el ultimo coeficiente te de cero caso contrario busca otro divisor y vuelve a intentar

4. Si obtienes cero entonces ese divisor es el valor de la variable y para que sea cero el factor será con el signo contrario
En nuestro caso nos salió para -4 entonces el factor es (x+4)

Volvemos a dividir:

1	2	-7	4	1
	1	3	-4	
1	3	-4	0	SI

$(x^2+3x-4)\ (x-1)\ (x+4)$

$(x+4)\ (x-1)\ (x-1)\ (x+4)$

$= (x+4)^2\ (x-1)^2$

5. El polinomio se factora entonces disminuyendo un grado al polinomio inicial tomando los coeficientes resultantes.

EJERCICIOS: FACTORIZA APLICANDO LA REGLA DE RUFFINI.

1) $a^3+6a^2+12a+8$

2) a^4-13a^2+36

3) a^4-5a^2+4

4) $m^3+m^2-13m-28$

5) x^3-3x-2

6) m^3-4m^2+m+6

7) $y^3+12y+6y^2+8$

8) x^3+2x^2-6-5x

9) $1+12y+48y^2+64y^3$

10) y^3-4y^2+6+y

Parte 2

OPERACIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Como sabemos, en R no podemos resolver raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-1}$, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a –1.

Para eso definimos el símbolo **i** para indicar un número tal que: $\mathbf{i^2 = -1}$ **ó** $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$

Teniendo en cuenta la igualdad a partir de la cual lo definimos, y que este número no es real, podemos usarlo para expresar las soluciones que no son reales de algunas ecuaciones.

Ej: $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x_1 = i$ $\quad$ $x_2 = -i$

Ya que: $i^2 + 1 = 0$ y $(-i)^2 + 1 = 0$

$x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2$

$x_1 = \sqrt{2}\ i$ $\quad$ $x_2 = -\sqrt{2}\ i$

Ya que: $(\sqrt{2}\ i)^2 + 2 = 0$ y $(-\sqrt{2}\ i)^2 + 2 = 0$

<u>Ejercicio:</u> Utiliza el símbolo i para expresar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$ $\quad$ b) $x^2 + 5 = 0$ $\quad$ c) $x^2 - 10 = 2x^2$

d) $-x^2 - 9 = 0$ $\quad$ e) $9x^2 + 16 = 0$ $\quad$ f) $(x + 5)^2 = 10x$

g) $\dfrac{1}{x^2+4} - 1 = 1$ $\quad$ h) $(x - 2)(-x - 2) = 20$ $\quad$ i) $(x - 8)^2 = -16x$

j) $3(2 - 2x) = (x - 4)(x - 2)$ $\quad$ k) $(2x^2 - 1)^2 = (1 + 2x)(1 - 2x) - 1$

Los números complejos

A los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, los llamamos *números complejos*.

$z = a + bi$

Se suele utilizar la letra z para designar un número complejo.

a se llama *parte real* de z.
Lo escribimos así:
$a = Re(z)$

b se llama *parte imaginaria* de z.
Lo escribimos así:
$b = Im(z)$

i verifica que $i^2 = -1$

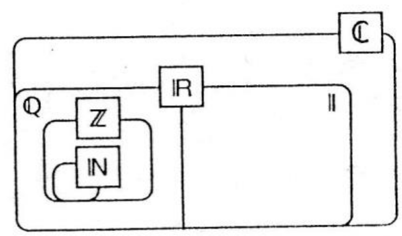
Ejemplos:

$z_1 = 2 - 3i$ → $Re(z_1) = 2$, $Im(z_1) = -3$

$z_2 = \frac{2}{3}i$ → $Re(z_2) = 0$, $Im(z_2) = \frac{2}{3}$

$z_3 = -5$ → $Re(z_3) = -5$, $Im(z_3) = 0$

Al conjunto de todos los números complejos lo designamos con el símbolo $\mathbb{C}$, y está definido de forma tal que incluye a los números reales, representados por aquellos números complejos cuya parte imaginaria es nula.
Un número complejo no nulo como z_2, cuya parte real es nula, se llama *imaginario puro*.



Ejercicio: Completen la siguiente tabla:

Número Complejo Z	Parte Real Re (z)	Parte Imaginaria Im(z)	¿es complejo, real o imaginario puro?
5 + 3 i			
	2	8	
	– 4	2/3	
	1	–3	
$2 - \sqrt{3}\ i$			
5 i			
	0	4	
	4	0	
	0	0	

CONJUGADO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

A partir de un número complejo z = a + bi, se definen los siguientes:

* El conjugado de z es $\bar{z} = a - bi$ (la parte real es igual y la parte imaginaria es opuesta)
* El opuesto de z es $-z = -a - bi$ (la partwe real y la parte imaginaria son opuestas)

Ejemplos:

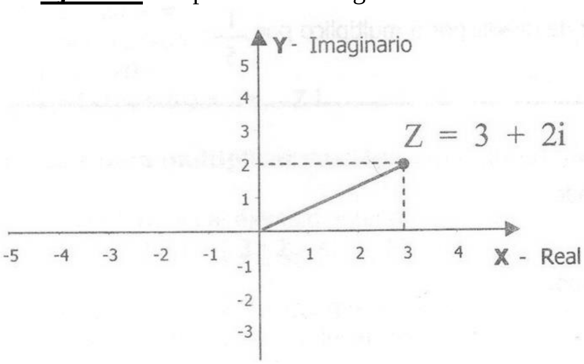
$z_1 = -1 - 2i$	$\overline{z_1} = -1 + 2i$	$-z_1 = 1 + 2i$
$z_2 = 4i$	$\overline{z_2} = -4i$	$-z_2 = -4i$
$z_3 = 6$	$\overline{z_3} = 6$	$-z_3 = -6$

Ejercicio: Completen el siguiente cuadro:

z	$\bar{z}$	$-z$
$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\,i$		
	$2 - 6\,i$	
		$-7 + \sqrt{3}\,i$
	-3	
		$-\sqrt{5}\,i$
	$2 - \frac{1}{2}\,i$	

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN N° COMPLEJO

Ejercicio: Representar los siguientes números complejos:



En el eje de abscisas (el de las X), se representa la componente Real y en el eje de ordenadas (el de las Y), se representa la imaginaria:

> El punto (a, b) determina con el origen de coordenadas un vector, al que llamaremos **Vector Posición** del Número Complejo a + bi

$z_1 = -1 - i$ $\qquad$ $z_2 = -3 + 2\,i$ $\qquad$ $z_3 = 2 - 3i$

Ejercicio: Dado $z = 5 - 3i$, graficar $z, -z, \bar{z}, \overline{-z}$. ¿Qué relación existe entre ellos?

MÓDULO Y ARGUMENTO

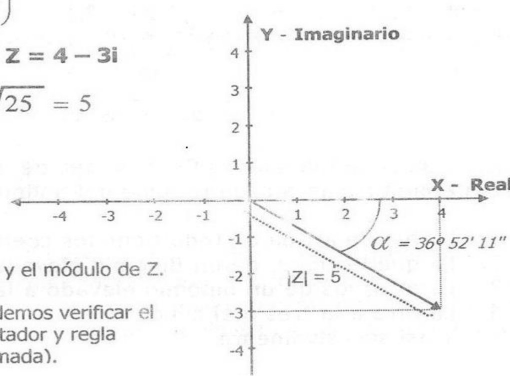
El Módulo de un Número Complejo z = a + bi es la longitud del Vector Posición.
El Módulo Se designa entre barras verticales |Z| y se calcula usando el Teorema de Pitágoras: $Z = a + bi \Rightarrow |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

El **Argumento (α)** de un Complejo z = a + bi, es el ángulo que forma el eje (positivo) X con el Vector Posición de Z. Se calcula mediante la expresión: $Z = a + bi \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

Ejemplo: Calculamos el Módulo y el Argumento de Z = 4 – 3i

$Z = 4 - 3i \Rightarrow |Z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$Z = 4 - 3i \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) = -36°52'11''$



Y acá lo vemos todo graficado. Podemos ver el argumento y el módulo de Z.

Nota. Si hacemos el dibujo a escala 1 unidad = 1 cm, podemos verificar el valor del argumento y módulo midiendo con transportador y regla respectivamente (obviamente en forma aproximada).

Ejercicio: Hallar el módulo y el argumento de los siguientes complejos y graficarlos:

a) $5 - 2\,i$ $\qquad$ b) $-3 + \frac{1}{2}\,i$ $\qquad$ c) $\frac{2}{3} + i$ $\qquad$ d) $-1 - i$

FORMAS DE REPRESENTAR UN NÚMERO COMPLEJO

* Forma Binómica: $z = 2 + 3\,i$

* Forma Cartesiana: $z = (2 ; 3)$

* Forma Polar: $z = (|z| , \alpha)$ **donde $|z|$ es el módulo , α el argumento**

$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$; $\alpha = \text{arctg}(3/2) = 56°18'35''$

$z = (\sqrt{13} , 56°18'35'')$

* Forma Trigonométrica: $z = |z| . (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$

$|z|$ módulo
α argumento

$z = \sqrt{13} .(\cos 56°18'35'' + i \operatorname{sen} 56°18'35'')$

Verificamos : $z = 3{,}605 . (0{,}554 + i\, 0{,}832)$

$z = 1{,}999\ldots. + 2{,}999\ldots i$ (aprox $2 + 3i$)

<u>Ejercicio:</u> Expresar los siguientes complejos en forma polar:

a) $z = -3\,i$ b) $z = -2 - 5\,i$ c) $z = (-2; -2)$ d) $z = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$

<u>Ejercicio:</u> Expresar en forma trigonométrica los n° complejos del ej 8

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En los siguientes ejemplos pueden observar cómo sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números complejos:

<u>Suma:</u> (2 + 3 i) + (1 – 5 i) = (2 + 1) + (3 – 5) i = 3 – 2 i

<u>Resta</u>: (2 + 3 i) – (1 – 5 i) = (2 – 1) + (3 –(–5) i) = 1 + 8 i

<u>Multiplicación:</u> (2 + 3 i) . (1 – 5 i) = 2 . 1 + 2 . (–5i) + 3 i.1 + 3i .(–5i) =
= 2 – 10 i + 3 i – 15 i² = 17 – 7 i
(recordar que **i² = –1**)

<u>División:</u>
Para resolver la división de dos números complejos, siendo el divisor no nulo, multiplicamos a ambos por el conjugado del divisor, del siguiente modo:

$$\frac{2+3i}{1-5i} = \frac{2+3i}{1-5i}.\frac{1+5i}{1+5i} = \frac{2+10i+3i+15i^2}{1^2-(5i)^2} = \frac{-13+13i}{1+25} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Multiplicar por una fracción de igual numerador y denominador es como multiplicar por 1, por lo tanto, la igualdad no se altera.

<u>Ejercicio</u>: Consideren los complejos: $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 3 + 5i$; $z_3 = 4 - i$ y resuelvan las siguientes operaciones:

a) $z_1 + z_2 - z_3 =$ b) $z_1 + \overline{z_2} - z_3 =$ c) $\overline{z_1} - \overline{z_3} =$ d) $5.\ z_3 =$

e) $(z_1 + z_2).\ z_3 =$ f) $(-\ z_1 + \overline{z_2}).(\overline{z_1} - z_3) =$ g) $z_1 .\ z_2 - z_3 =$ h) $(z_3)^2 =$

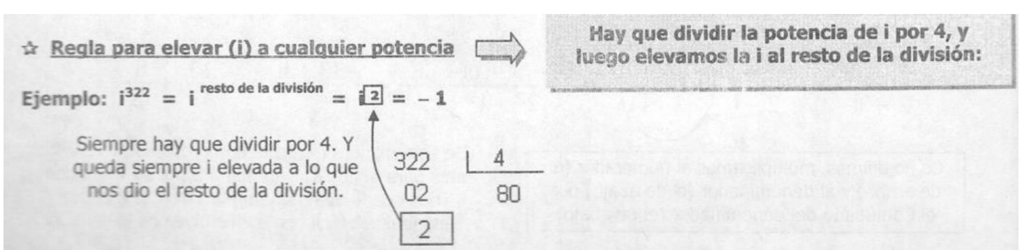
<u>Ejercicio:</u> Consideren los complejos: $z_1 = 3 - i$; $z_2 = -4i$; $z_3 = 7 + 2i$ y resuelvan las siguientes divisiones:

a) $\frac{z_2}{z_1} =$ b) $\frac{z_1}{z_3} =$ c) $\frac{z_3}{z_2} =$ d) $\frac{z_2}{z_3} =$ e) $16.\frac{\overline{z_3}}{z_2} =$ f) $\frac{1}{z_1} =$

<u>Ejercicio:</u> Completen las potencias de i:

$i^0 =$ $i^1 =$ $i^2 =$ $i^3 =$
$i^4 =$ $i^5 =$ $i^6 =$ $i^7 =$

¿Qué regularidad observan?



<u>Ejercicio:</u> Calcular las siguientes potencias:

a) $i^{127} =$ e) $i^{94} =$ i) $i^{33}.i^{11} =$

b) $i^{44} =$ f) $(i^{12})^4 =$ j) $i^{2022} : i^3 =$

c) $i^{242} =$ g) $(i^3)^5 =$ k) $x + 1 = i^{27}$

d) $i^{69} =$ h) $(i^9)^{27} =$ l) $x - i = i^{-3}$

EJERCICIOS

Adición y Sustracción de Números Complejos:

a) (10 + 3 i) + (8 + 2 i) + (4 + 5 i) = R: (22, 10)

b) (7 + 5 i) – (3 – 4 i) – (– 5 + 2 i) = R: (9 , 7)

c) (1 + ½ i) + (3 – 3/2 i) + (– 4 + i) = R: (0)

d) $(-8+\frac{3}{5}i)+(-\frac{7}{4}+\frac{7}{10}i)+(-\frac{1}{4}-\frac{3}{10}i)=$ R: (– 10 + i)

e) $(\frac{2}{5}+i)+(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}i)+(\frac{2}{15}+\frac{1}{4}i)+(-\frac{28}{15}-\frac{3}{2}i)=$ R: (– i)

f) $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})+(\frac{\sqrt{2}}{2}+i)+(\frac{\sqrt{2}}{2}-i)=$ R: ($\sqrt{3}+\sqrt{2}$)

Multiplicación y División de Números Complejos:

a) (10 + 2 i) . (3 + 15 i) = R: (156 i)

b) (– 5 + 2 i) . (5 + 2 i) = R: (– 29)

c) (– 1 + i) . (– 1 – i) = R: (2)

d) $-\frac{3}{5}i.\frac{4}{3}i=$ R: (4/5)

e) ($\sqrt{2}+\sqrt{3}$ i) . ($\sqrt{3}+\sqrt{2}$ i) = R: (5 i)

f) $(\frac{\sqrt{2}}{2}+i).(\frac{2}{3}+4i).(\frac{\sqrt{2}}{2}-i)=$ R: (1 + 6 i)

g) (– 4 + 2 i) : (1 + i) = R: (– 1 + 3 i)

h) (– 1 + i) : (– 1 – i) = R: (– i)

i) (4 + 2 i) : i = R: (2 – 4 i)

j) $(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}i):(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}i)=$ R: (i)

k) ($\sqrt{2}+\sqrt{3}$ i) : ($\sqrt{2}-\sqrt{3}$ i) = R: $(-\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}i)$

Potencia de Números Complejos:

a) i^{60} = b) i^{602} = c) i^{77} =

d) i^{104} = e) $(-i)^{257}$ =

f) $(-i)^{13}$ =

g) $(1+i)^2$ = (R: 2i) h) $(4-3i)^2$ = (R: 7 – 24 i)

i) $(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}i)^2=$ (R: $-\frac{9}{100}+\frac{2}{5}i$) j) $(\frac{2}{7}+\frac{3}{5}i)^2=$ (R: $-\frac{341}{1225}+\frac{12}{35}i$)

Ejercicios combinados en C:

a) $\frac{(1+2i)^2.i^{47}}{(3-2i)-(2+i)}=$ (R: $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$) d) $\frac{2-2i^3}{3-i^5}+\frac{-2i}{1-i}=$

b) $\dfrac{i^{-253}(3+2i)-(3-2i)}{(4+2i)+(-2+i)} =$ (R: $\dfrac{-5+i}{13}$)

c) $\dfrac{(2+i)^{-1}.(2+i)^2}{i^{39}.(3-2i)} =$ (R: $\dfrac{-7+4i}{13}$)

e) $\dfrac{2i}{(1-i)^2}+\dfrac{(1+i)^2}{2i} =$

f) $\dfrac{(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)^2}{1-i} =$

<u>Ecuaciones en C: Hallar el valor de z:</u>

a) z . (2 – 3 i) + (– 2 – i) = 3 – 2 i R: (1 + i)

b) (– 1 , – 2) – z = (1 , – 1) R: (–2, –1)

c) (2 , – 3) + z = (–1 , 2) R: (– 3 , 5)

d) (– 2 , $\sqrt{2}$) + z = (– 2 , 3 $\sqrt{2}$) – z R: (0 , $\sqrt{2}$)

e) (1 – i) . z = – 1 + i R: (– 1)

f) $\dfrac{z+(2,-1)}{(2,-2)}$ = (2 , 2) R: (6 , 1)

g) (2 , – 2) . z – (8 , – 2) = (0 , 2) R: (2 , 2)

h) $\dfrac{(\sqrt{3},-\sqrt{3})}{z}$ + (1 , 0) = ($\sqrt{3}$ + 1 , $\sqrt{3}$) R: (0 , – 1)

i) 2 i + z = 3 – i R: (3 – 3 i)

j) (2 – 3 i) . z = (2 + 3 i) . i R:($-\dfrac{12}{13}-\dfrac{5}{13}i$)

k) 2 + i + 3 z = 2 – i R: (– 2/3i)

l) $\dfrac{1+i}{z}$ – (1 + 2 i) = i R: ($\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i$)

ll) $\dfrac{z+1}{z-1}=2+i$ R: (2 – i)

m) $\dfrac{zi}{z+i}=1+2i$ R: ($\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$)

n) $\dfrac{2-i}{z-1}=1+2i$ R: (1 – i)

o) $\dfrac{z+2i}{z-i}=\sqrt{2}$ i R: ($\sqrt{2}$)

p) z $\sqrt{3}$ = z i – ($\sqrt{3}$ – i) R: (–1)

TRIGONOMETRÍA

Los ángulos se pueden medir en grados sexagesimales y radianes. Un ángulo de ***1 radián*** es aquel cuyo arco tiene longitud igual al radio.

- $360º = 2\pi$ radianes (una vuelta completa)
- Un ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes (un cuarto de vuelta)
- $180º = \pi$ radianes (media vuelta)
- Como $180º = \pi$ rad, resulta que $1º = \frac{\pi}{180}$ rad
- Un ángulo de 1 radian tiene $\frac{180}{\pi}$ = 57,29578 grados = 57º 17' 45''

Para transformar de una unidad a otra, usamos la regla de tres:

$$\frac{180^o}{x^o} = \frac{\pi\, rad}{y} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$$ <u>ejemplo</u>: 40º a rad $$\frac{180^o}{40^o} = \frac{\pi\, rad}{y} \rightarrow y = \frac{40^o\,\pi\, rad}{180^o} = \frac{4\pi\, rad}{18} = \frac{2\pi\, rad}{9}$$

<u>Ejercicios:</u>

Transformar el ángulo de grados a rad:

1) 15º	2) 35º	3) 80º	4) 150º	5) 200º
6) 90º	7) 60º	8) 45º	9) 30º	

Transformar el ángulo de rad a grados:

1) $\frac{\pi}{5} rad$ 2) $\frac{\pi}{10} rad$ 3) $3\pi\ rad$ 4) $\frac{17\pi}{4} rad$

<u>Aplicaciones de la medida en radianes</u>

De la definición de la medida en radianes se deduce que la longitud de un arco circular de radio r y ángulo igual a α radianes es:

$S = r \cdot \alpha$, S: arco circunferencia, r: radio y α : ángulo en rad

Ya que conocemos el perímetro de una circunferencia de radio unitario ($2\pi r = 2\pi$), entonces el ángulo de una circunferencia completa, medido en radianes es 2π .

<u>Ejemplo aplicación</u>

1 Una correa conecta dos poleas de radios $r = 10$ cm y $R = 25$ cm. Si la grande da un giro completo, ¿qué ángulo expresado en grados habrá girado la pequeña?

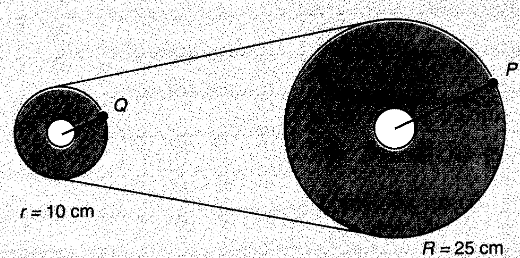


Figura 1.11.

Solución:

El punto P recorre la misma distancia que el punto Q (evidente si piensas en el movimiento de la correa). La longitud del arco recorrido por P en una vuelta es:

$$s_P = R \cdot \alpha_P = 25 \cdot 2\pi = 50\pi = 157{,}08 \text{ cm}$$

Por tanto, el ángulo girado por Q es:

$$\alpha_Q = \frac{s_Q}{r} = \frac{s_P}{r} = \frac{157{,}08}{10} = 15{,}708 \text{ radianes}$$

O sea,

$$15{,}708 \cdot \frac{180}{\pi} = 900°.$$

2 Un aspersor funciona con un mecanismo que le produce un movimiento de giro, de ida y vuelta, de 60°. Si el chorro de agua alcanza 16 m, halla el área A de la superficie de césped regada.

Solución:

Riega un sector de ángulo $\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$ radianes y radio 16 m, así que:

$$A = \frac{1}{2}(16)^2\frac{\pi}{3} = 134 \text{ m}^2$$

3 En un *sprint* los ciclistas alcanzan una velocidad de 20 m/s (72 km/h). ¿Cuál es la velocidad angular de las ruedas, es decir, cuántos grados gira por segundo? (Radio de las ruedas = 35 cm).

Solución:

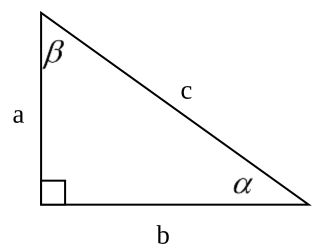
Como cada giro de la rueda hace avanzar $2\pi r = 0{,}70\pi = 2{,}20$ m, en un segundo da $\frac{20}{2{,}20} = 9{,}095$ vueltas, o sea 9,095 veces 360°, unos 3.274°. (Más de 30° en una centésima de segundo, ¡impresionante!).

Ahora tu

1) ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las cuatro y media en punto? Y a las 10:20 hrs.?
2) Halla el radio r de una rueda que gira 300 vueltas por minuto impulsada por una correa que se mueve a 45 m/s.
3) La rueda de un vehículo tiene un diámetro de 90 cm. ¿Cuántas vueltas da aproximadamente por minuto cuando viaja a 120 km/h?

Funciones trigonométricas

Utilizaremos un triángulo rectángulo para definir las funciones trigonométricas: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (cosec).



En un triángulo rectángulo, estas funciones se definen como sigue:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Aquí podemos darnos cuenta que basta con conocer las funciones sen α y cos α para poder calcular las otras funciones, veamos por qué:

$$\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \qquad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

Aplica los contenidos de matemática común y calcula los valores de los ángulos de 30º, 45º y 60º

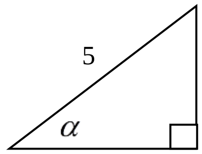
Demostrar que: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, usa los valores de los ángulos anteriores y después demuéstralo para cualquier valor del ángulo.

Ejemplo:

1) Un ángulo agudo α tiene $sen\alpha = \frac{3}{5}$. Halla las restantes razones trigonométricas de este ángulo.

1º método: Usando triángulos

Por teorema de Pitágoras buscamos el otro cateto del triángulo, es que es 4



Ahora aplicamos las definiciones de las funciones trigonométricas y encontramos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{c.ad.}{hip} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{c.op.}{c.ad.} = \frac{3}{4} \qquad \cot\alpha = \frac{c.ad.}{c.op.} = \frac{4}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{hip}{c.ad.} = \frac{5}{4} \qquad cosec\alpha = \frac{hip}{c.op} = \frac{5}{3}$$

2º método: Usando las identidades básicas

Por la identidad $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ tenemos que:

$$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25} \rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Luego, usando estos dos valores, del seno y coseno, calculamos todas las demás funciones:

$$\tan\alpha = \frac{sen\alpha.}{\cos\alpha.} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

así sucesivamente……

Ejercicios:

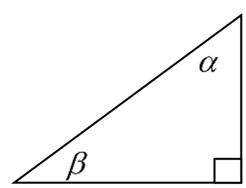
1) Si $\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, encuentra las otras funciones. Entrega los valores simplificados y racionalizados.
2) Si $\cos\beta = 0{,}2$, encuentra las otras funciones.
3) Si $\tan\alpha = \frac{5}{9}$, encuentra las otras funciones.

<u>Ángulos complementarios:</u>

En el triángulo rectángulo siguiente:

$$sen\beta = sen(90º - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos\beta = \cos(90º - \alpha) = sen\alpha$$
$$\tan\beta = \tan(90º - \alpha) = \cot\alpha$$

En estas relaciones, se cumplen con dos ángulos que son complementarios, que suman 90º, y se dicen que estas funciones son <u>**co funciones**</u> una de la otra.



$\beta = 90º - \alpha$

Ejemplos de uso de las co funciones:

1) Calcular sen 30º.

Sen 30º = sen (90º - 30º) =cos 60º = ½

2) Expresar los siguientes valores de funciones trigonometricas como el valor de la función de un ángulo positivo menor que 45º.

a) sen 72º → sen 72º = sen (90º - 72º) = cos 18º

b) cos 46º → cos 46º = cos (90º - 46º) = sen 44º

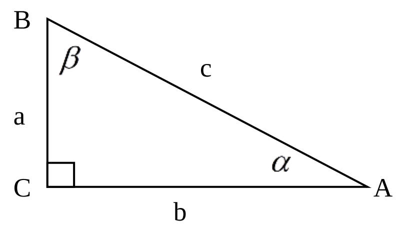
Ejercicios:

1) Expresar el valor de la función trigonométrica en términos de un ángulo no mayor que 45º:

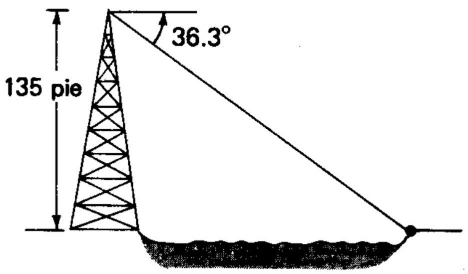
   a) sen 60º   b) cos 84º   c) tan 49,8º   d) sen 79,6º

2) Resolver los triángulos rectángulos para los datos dados. Usa calculadora.

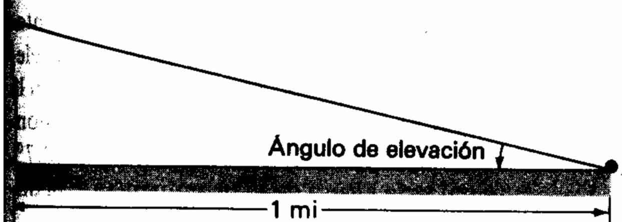
   a) α = 24º y c =16.
   b) a = 32.46 y b = 25,78
   c) α = 24º y a =16
   d) β = 71º , c = 44
   e) a = 312,7 ; c = 809
   f) b = 4.218 ; c = 6.759
   g) β = 81º12' ; a = 43,6



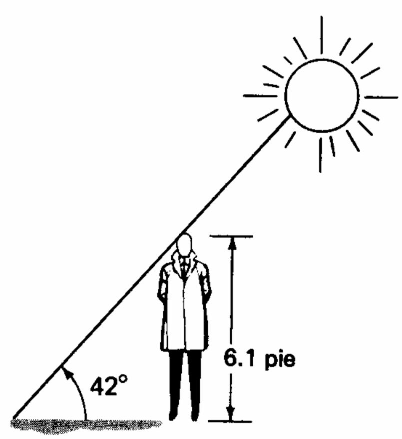
3 Una torre de 135 pie de altura está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es 36.3°. ¿Cuál es la anchura del lago?



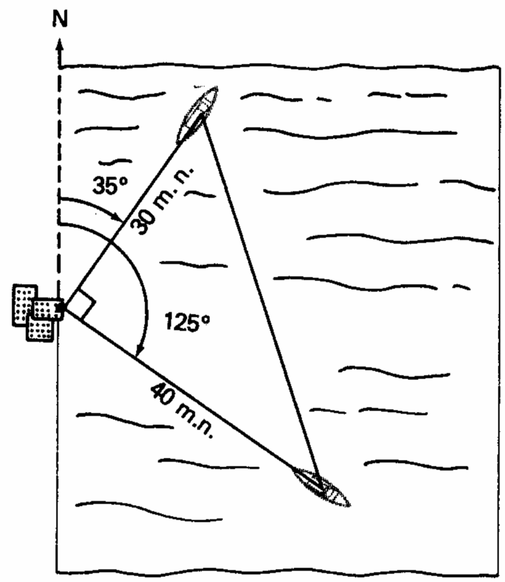
5 1. El edificio Empire State (en Nueva York) tiene 1250 pie de altura. ¿Cuál es el ángulo de elevación de su último piso desde un punto de la calle que está a 1 mi (5280 pie) desde la base del edificio?



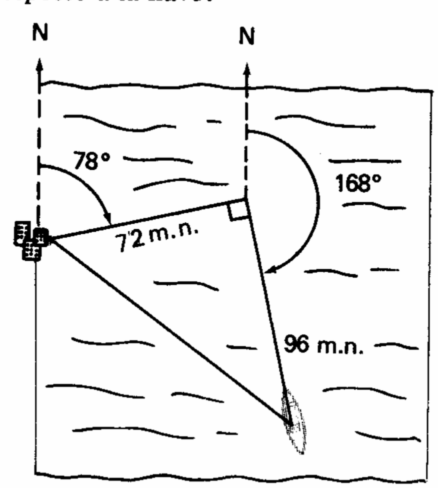
6 2. Si el ángulo de elevación del Sol es 42°, ¿cuál es la longitud de la sombra proyectada sobre el suelo de una persona que mide 6.1 pie de altura?



4 **43.** Dos embarcaciones salen de puerto al mismo tiempo. La primera navega con un curso de 35° a 15 nudos, mientras que la segunda lo hace con un curso de 125° a 20 nudos. Obtenga, después de 2 h, (a) la distancia entre las naves; (b) la orientación de la primera embarcación respecto a la segunda; y (c) la orientación de la segunda respecto a la primera.



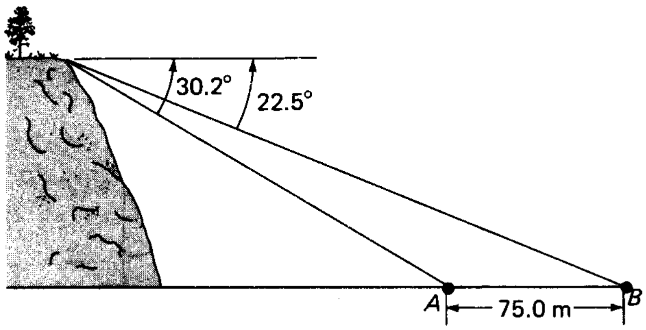
7 **44.** Un barco sale de puerto y durante 4 horas sigue un curso de 78° a 18 nudos. Después, la nave cambia al curso de 168° y lo sigue durante 6 h a 16 nudos. Después de 10 h, (a) ¿cuál es la distancia del barco al puerto?, y (b) ¿cuál es la orientación del puerto con respecto a la nave?



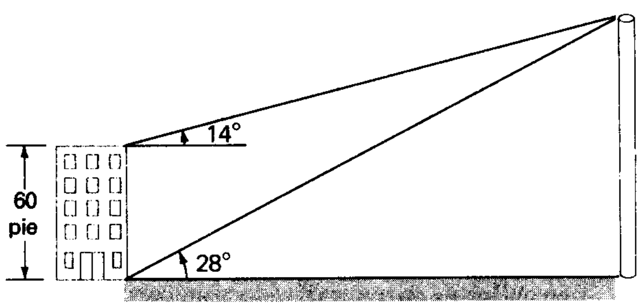
8. Desde un punto A en la orilla de un río, cuya anchura es de 50m., se ve un árbol justo enfrente. ¿Cuánto tendremos que caminar río abajo, por la orilla recta del río, hasta llegar a un punto B desde el que se vea el pino formando un ángulo de 60º con nuestra orilla?

9. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8m. del suelo y observa el edificio de enfrente. La parte superior con un ángulo de 30 grados y la parte inferior con un ángulo de depresión de 45 grados. Determine la altura del edificio señalado.

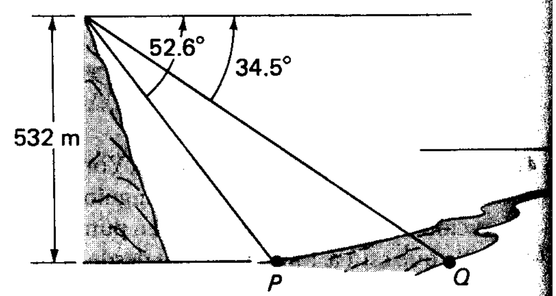
10. **5.** Los puntos *A* y *B* están en una misma recta horizontal con el pie de una colina, y los ángulos de depresión de estos puntos desde la cima son 30.2° y 22.5°, respectivamente. Si la distancia entre *A* y *B* es 75.0 m, ¿cuál es la altura de la prominencia?



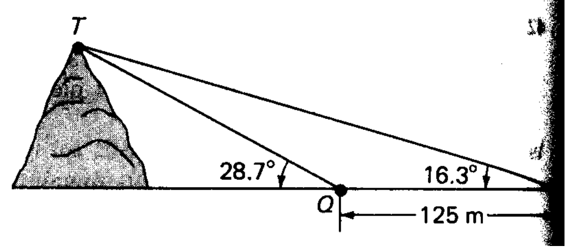
12. **6.** Al observar desde el último piso de un edificio de 60 pie de altura, el ángulo de elevación del extremo superior o tope de un poste vertical, es de 14°. Desde la base del edificio, el ángulo de elevación del extremo del poste es 28°. Obtenga (a) la altura del poste y (b) la distancia del edificio al poste.



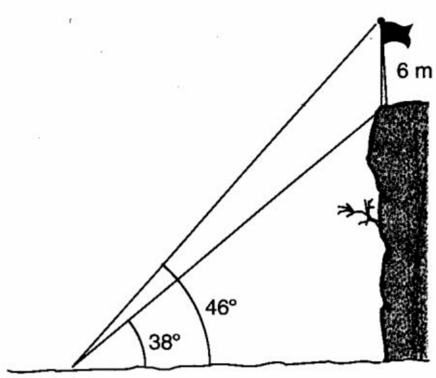
11. **17.** Desde la cima de una montaña de 532 m de altura con respecto a un río cercano, el ángulo de depresión de un punto *P* en la ribera más cercana del río es de 52.6°, y el ángulo de depresión de un punto *Q* directamente opuesto a *P* en la otra ribera, es de 34.5°. Los puntos *P*, *Q* y el pie de la montaña están en una misma horizontal. Obtenga la distancia correspondiente a la anchura del río entre *P* y *Q*.



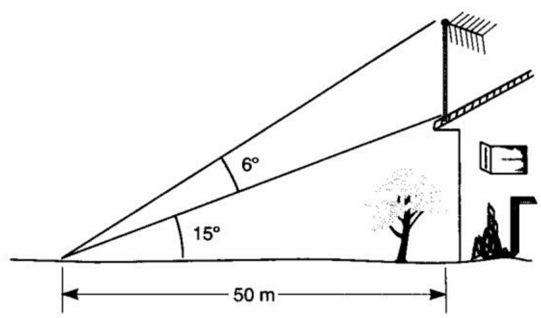
13. **18.** El punto *T* está en la cumbre de un monte. Desde un punto *P* del suelo, el ángulo de elevación de *T* es 16.3°. Desde el punto *Q* en la misma horizontal con *P* y el pie de la montaña, el ángulo de elevación de *T* es 28.7°. ¿Cuál es la altura de la prominencia si la distancia entre *P* y *Q* es 125 m?



14. Desde un punto a ras de suelo, los ángulos de elevación que presentan la base y la punta de un mástil de 6 m de altura, colocado sobre un acantilado, son 38° y 46°. Estima la altura del acantilado.



15. Calcula la altura de la antena que está sobre el tejado de la casa.



16. Sobre un plano horizontal, un mástil está sujeto por dos cables, de modo que los tirantes quedan a lados opuestos. Los ángulos que forman estos tirantes con respecto al suelo son 27 grados y 48 grados. Si la distancia entra las cuñas es de 50 m. ¿cuánto cable se ha gastado?, ¿cuál es la altura a la cual están sujetos los cables?

17. Desde lo alto de una torre de 300 m. de altura se observa un avión con un ángulo de elevación de 15 grados y un automóvil en la carretera, en el mismo lado que el avión, con un ángulo de depresión de 30 grados. En ese mismo instante, el conductor del automóvil ve al avión bajo un ángulo de elevación de 65 grados. Si el avión, el auto y el observador se encuentran en un mismo plano vertical: calcule la distancia entre el avión y el automóvil, también calcule la altura a la que vuela el avión en ese instante.

18. Halla la altura de un edificio que proyecta una sombra de 56 m. a la misma hora que un árbol de 21 m. proyecta una sombra de 24 m.

19. Tenemos dos triángulos isósceles semejantes. Del pequeño conocemos que cada uno de los lados iguales mide 5 cm y el lado desigual 3 cm; pero del grande, sólo sabemos que el lado desigual mide 7 cm. ¿Cuánto mide cada uno de los otros dos lados?

20. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 5 cm.

21. Sabiendo que en un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 25 m y un cateto 7 m, halla el otro cateto.

22. Halla la altura y el área de un triángulo equilátero de 2,5 m de lado.

23. Un poste vertical de 3 m proyecta una sombra de 2 m; ¿qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4,5 m?

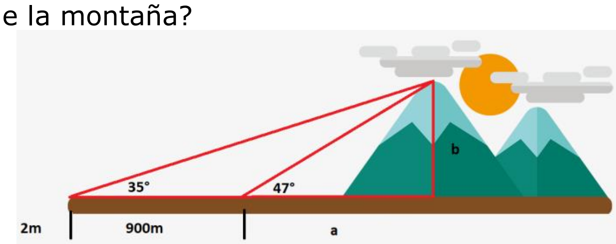
24. Si un campo está dibujado a escala de 1:1200, ¿cuál será en el terreno la distancia que en el dibujo mide 18 cm?

25. ¿A qué escala está dibujado un campo, si en el plano un segmento de 12 cm representa 60 m de terreno?

26. ¿A cuántos radianes equivalen 115°38'27"?

27. ¿A cuántos grados sexagesimales equivalen 2 radianes?

28. Para medir la altura de una montaña, un topógrafo toma dos visuales de la cima desde dos posiciones separadas entre sí 900 metros sobre una línea directa a la montaña (visuales tomadas desde el mismo nivel). La primera observación da un ángulo de elevación de 47° y la segunda uno de 35°. Si el tránsito (instrumento para medir ángulos) está a 2 metros del suelo. ¿Cuál es la altura b de la montaña?



LOGARITMOS

Definición: Se define el logaritmo en base a de b $\log_a b$, como el valor c, tal que $a^c = b$; es decir:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad con \quad a > 0 \quad y \quad a \neq 1 \quad y \quad b > 0$$

Ejemplos:

1) $\log_2 64 = 6 \text{ porque } 2^6 = 64$
2) $\log_7 49 = 2 \text{ porque } 7^2 = 49$
3) $\log_5 125 = 3 \text{ porque } 5^3 = 125$

Nota: Para resolver los logaritmos, es necesario conocer las **propiedades de las potencias**:

1. Cualquier número elevado a 0 es 1:
   $a^0 = 1$
2. Cualquier número elevado a 1 es el mismo número:
   $a^1 = a$
3. El producto de potencias de la misma base, es una potencia con la misma base y con exponente la suma de los exponentes:
   $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ ejemplo $3^7 \cdot 3^4 = 3^{7+4} = 3^{11}$
4. La división de potencias de la misma base, es una potencia con la misma base y con exponente la resta de los exponentes:
   $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ejemplo $\dfrac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$
5. La potencia de una potencia, es una potencia con la misma base y con exponente el producto de los exponentes:
   $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ ejemplo $\left(7^2\right)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$
6. Una raíz se puede escribir como potencia del siguiente modo:
   $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ ejemplo: $\sqrt[4]{3^5} = 3^{\frac{5}{4}}$
7. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$; o lo que es lo mismo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ ejemplos: $\dfrac{1}{3^2} = 3^{-2}$, $\dfrac{1}{5} = 5^{-1}$

Consecuencias de la definición:

1. El logaritmo de 1 siempre es 0, independientemente de la base en que se calcule; es decir:
   $\log_a 1 = 0 \text{ porque } a^0 = 1$
   Ejemplos:
   1) $\log_2 1 = 0 \text{ porque } 2^0 = 1$
   2) $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0 \text{ porque } \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 1$
2. El logaritmo de la base siempre es 1; es decir: $\log_a a = 1 \text{ porque } a^1 = a$
   Ejemplos:
   1) $\log_4 4 = 1 \text{ porque } 4^1 = 4$
   2) $\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{5} = 1 \text{ porque } \left(\dfrac{1}{5}\right)^1 = \dfrac{1}{5}$

Métodos de resolución de los logaritmos:

1) Si la base del logaritmo es un número sencillo (2, 3, 4, 5...), basta con escribir como potencia de dicha base el número del que se quiere calcular el logaritmo (si es fácil, en otro caso es mejor utilizar el método 2). Cuando ya se tiene así expresado, el valor del logaritmo es el exponente de dicha potencia:

   Ejemplo:

$$\log_5 \frac{\sqrt[4]{125}}{25} = \log_5 \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5^2} = \log_5 \frac{5^{\frac{3}{4}}}{5^2} = \log_5 5^{\frac{3}{4}-2} = \log_5 5^{\frac{3-8}{4}} = \log_5 5^{\frac{-5}{4}} = \frac{-5}{4}$$

2) En cualquier caso también se puede calcular el logaritmo igualándolo a “x”, aplicando la definición y escribiendo ambos lados de la igualdad como potencias en la misma base. Cuando los dos lados de la igualdad son potencias con la misma base, basta con igualar los exponentes y resolver la ecuación obtenida:

   Ejemplo:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{9\cdot\sqrt[5]{81}}{\sqrt{27}} = x \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{9\cdot\sqrt[5]{81}}{\sqrt{27}} \quad \rightarrow \quad \left(3^{-1}\right)^x = \frac{3^2\cdot\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt{3^3}} \quad \rightarrow \quad 3^{-1\cdot x} = \frac{3^2\cdot 3^{\frac{4}{5}}}{3^{\frac{3}{2}}} \quad \rightarrow \quad 3^{-x} = \frac{3^{2+\frac{4}{5}}}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rightarrow \quad 3^{-x} = \frac{3^{\frac{10+4}{5}}}{3^{\frac{3}{2}}} \quad \rightarrow \quad 3^{-x} = 3^{\frac{14}{5}-\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad 3^{-x} = 3^{\frac{28-15}{10}} \quad \rightarrow \quad -x = \frac{28-15}{10} \quad \rightarrow \quad -x = \frac{13}{10} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{13}{10}$$

Logaritmo decimal: Se llama logaritmo decimal, al logaritmo en base 10. En el logaritmo decimal, no se escribe la base: $\log_{10} a = \log a$

EJERCICIOS

I) Calcular :

1) $\log_2 8 =$ R : 3
2) $\log_3 9 =$ R : 2
3) $\log_4 2 =$ R : 0,5
4) $\log_{27} 3 =$ R : 1 / 3
5) $\log_5 0{,}2 =$ R : -1
6) $\log_2 0{,}25 =$ R : -2
7) $\log_{0,5} 16 =$ R : -4
8) $\log_{0,1} 100 =$ R : -2
9) $\log_3 27 + \log_3 1 =$ R : 3
10) $\log_5 25 - \log_5 5 =$ R : 1
11) $\log_4 64 + \log_8 64 =$ R : 5
12) $\log 0{,}1 - \log 0{,}01 =$ R : 1
13) $\log 5 + \log 20 =$ R : 2
14) $\log 2 - \log 0{,}2 =$ R : 1
15) $\log 32 / \log 2 =$ R : 5

II) Determinar el valor de x :

1) $\log_3 81 = x$ R : 4
2) $\log_5 0{,}2 = x$ R : -1
3) $\log_4 64 = (2x - 1)/3$ R : 5
4) $\log_2 16 = x^3/2$ R : 2
5) $\log_2 x = -3$ R : $1/8$
6) $\log_7 x = 3$ R : 343
7) $\log_6 [4(x - 1)] = 2$ R : 10
8) $\log_8 [2(x^3 + 5)] = 2$ R : 3
9) $\log_x 125 = 3$ R : 5
10) $\log_x 25 = -2$ R : $1/5$
11) $\log_{2x+3} 81 = 2$ R : 3
12) $x + 2 = 10^{\log 5}$ R : 3
13) $x = 10^{4 \log 2}$ R : 16
14) $x = \log 8 / \log 2$ R : 3
15) $x = \log 625 / \log 125$ R : $4/3$

III) Si $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ y $\log 7 = 0{,}845$, entonces :

1) $\log 8 =$ R : 0,903
2) $\log 9 =$ R : 0,954
3) $\log 5 =$ R : 0,699
4) $\log 54 =$ R : 1,732
5) $\log 75 =$ R : 1,875
6) $\log 0{,}25 =$ R : $-0{,}602$
7) $\log (1/6) =$ R : $-0{,}778$
8) $\log (1/98) =$ R : $-1{,}991$
9) $\log (1/36) =$ R : $-1{,}556$
10) $\log (2/3) =$ R : $-0{,}176$
11) $\log 0{,}3 =$ R : $-0{,}523$
12) $\log 1{,}25 =$ R : 0,097

FUNCIONES

Definición 2.8 **Dados dos conjuntos no vacíos A y B una** función **f definida en A con valores en B, o simplemente de A en B, es una correspondencia que asocia a cada elemento** $x \in A$ **un único elemento** $y \in B$.

La función así definida se llama aplicación.

Notación. **Las funciones se denotan con letras del alfabeto español o griego: f, g, h, F, φ, η, β, etc. Y simbólicamente por:**

$$f : A \to B \qquad \text{ó} \qquad A \xrightarrow{f} B; y = f(x)$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

donde:

$f(x)$ **: se lee "f de x"**

$y = f(x)$**: es la regla de correspondencia**

y : es el valor o la imagen de x mediante f

x : es la pre imagen de y mediante f

Cualquier elemento arbitrario x del dominio de f se llama variable independiente **y su imagen correspondiente mediante f se llama** variable dependiente**. En el ejemplo del área del círculo, el radio, r, es la variable independiente y el valor A del área es la variable dependiente, se escribe** $A(r) = \pi r^2, r > 0$.

La regla de correspondencia describe la forma como se obtiene el valor de la función f(x). Una función está bien definida cuando se conocen su dominio y su regla de correspondencia.

Definición 2.9 **Sea** $f : A \to B$ **una función definida por la regla de correspondencia** $y = f(x)$.

a) El conjunto A se llama dominio **de la función. Se denota por** Dom f.

Simbólicamente, $\text{Dom}(f) = \{x \in A / \exists! y \in B \wedge y = f(x)\}, \quad \text{Dom}(f) = A$

b) El subconjunto de B formado por los valores que la función asigna a cada uno de los elementos de A, se llama rango o recorrido **de la función. Se denota con** Ran (f).

Simbólicamente, $\text{Ran}(f) = \{y \in B / \exists x \in A \wedge y = f(x)\}, \quad \text{Ran}(f) \subseteq B$

Teorema 2.4 **Dos funciones** f **y** g **son iguales si y solo si:**

a) f **y** g **tienen el mismo dominio**

b) $f(x) = g(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$

Ejemplo 1 **Si** $A = \{1,2,3,4,5\}, \quad B = \{0,2,4,6,8,10\}$ **son dos conjuntos y** $f : A \to B$ **es una función definida por** $f(x) = 2x$**, hallar** $\text{Dom}(f)$ y $\text{Ran}(f)$

Solución

$\text{Dom}(f) = \{1,2,3,4,5\}$

$\text{Ran}(f) = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{2,4,6,8,10\}$

Luego $\text{Ran}(f) = \{2,4,6,8,10\}$

Ejemplo 2 **Si f de IR en IR es la función definida por** $f(x) = x^3 - 2x + 4$**; hallar:**

a) el valor de $f(-1) + f(3)$

b) una función g **, tal que** $g(x)=f(x+2)$

c) El valor de $x \in \text{Dom}\, f$ **tal que su imagen es 8**

Solución

a) Sustituyendo x por -1 y 3 en la regla de correspondencia $f(x)=x^3-2x+4$ **se tiene,**

$$f(-1)=(-1)^3-2(-1)+4, \text{luego } f(-1)=5$$

$$f(3)=(3)^3-2(3)+4, \text{entonces } f(3)=25$$

Por tanto $f(-1)+f(3)=30$

b) $g(x)=f(x+2)=(x+2)^3-2(x+2)+4$

$$=x^3+6x^2+12x+8-2x-4+4$$

Luego $g(x)=x^3+6x^2+10x+8$

$\text{Dom}\, g=\text{Dom}\, f=\mathbb{R}$ **IR**

c) $f(x)=8=x^3-2x+4$**, la ecuación es equivalente a :**

$$x^3-2x-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Por tanto $x=2$ **es la pre imagen de 8**

Definición 2.10 **Sea** $f:A \to B$ **una función definida por la regla de correspondencia** $y=f(x)$**, el** grafo de f**, denota con** Gr(f) **es el conjunto de A x B formado por todos los pares ordenados (x, f(x)) ; siendo x elemento de A.**

Simbólicamente, $\text{Gr}(f)=\{(x,f(x))/x \in A\}$

La representación gráfica de l grafo de la función, cuando es posible, se llama gráfica de la función**.**

Teorema 2.5. **Existe una función** $f:A \to B$ **con regla de correspondencia** $y=f(x)$ **si y solo si el grafo de f satisface las funciones propiedades:**

a) $\forall x \in A, \exists y \in B : (x,y) \in \text{Gr}(f)$

b) $(x,y) \in \text{Gr}(f) \wedge (x,z) \in \text{Gr}(f) \Rightarrow y=z$

Observación 2.9**. Según el teorema f es una función siempre y cuando su gráfica es el conjunto de pares ordenados (x, y) con y = f(x) tal que ninguno de esos pares tiene la misma primera componente, además por definición para cada x en el dominio de la función existe uno y solo un valor de y = f(x). Geométricamente esto significa que ninguna recta vertical puede cortar a la gráfica de la función en mas de un punto.**

Observación 2.10. **Toda función es una relación pero no toda relación es una función.**

Ejemplo 4 **Determinar los valores de a y b** $\in \mathbb{R}$ **, si f es una función tal que**

$\text{Gr}(f)=\{(1,0),(2,4),(3,-1),(2,a+b),(2,8a-2-b)\}$

Solución

Tres pares ordenados de Gr(f) tienen la misma primera componente, como f es función, aplicando el teorema 2.5 ellos representan al mismo punto. Es decir :

$$(2,4) \in \text{Gr}(f) \wedge (2,a+b) \in G(f) \Rightarrow 4=a+b \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

$$(2,4) \in \text{Gr}(f) \wedge (2,8a-2-b) \in \text{Gr}(f) \Rightarrow 4=8a-2-b\ldots.. \; (2)$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a+b=4 \\ 8a-b=6 \end{cases}$ **resuelta** $a = 10/9,\ b = 26/9$

Ejemplo 5 **Determinar si f de IR en IR es una función, si Gr(f) = { (x,y)∈ IRxIR / y^2 = x }**

Solución
Aplicando el teorema 2.5 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **es función si y solo si**
a) ∀x ∈ IR , ∃ y ∈ IR tal que (x,y) ∈ Gr(f) además
b) $(x,y)\in Gr(f)\wedge(x,z)\in Gr(f)\Rightarrow y=z$
pero si $(x,y)\in Gr(f)\Rightarrow y^2=x$
$(x,z)\in Gr(f)\Rightarrow z^2=x$
De ahí que $y^2=z^2$**, esto no implica que y = z.**
Por tanto f no es una función.
Si $Gr(f)=\{(1,2),(2,3),(4,2),(n,3),(3,3),(1,b)\}$ **y f es una función definida de A en B, donde** $A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{1,2,3\}$**. Hallar**

a) $f\left[f(2)\right]$

b) una función g con dominio en A tal que $g(x)=bx^2+n$

EJERCICIOS
1.Si los pares ordenados (-1, 4), (2, a), (3, b –a) y (2, 1 + b) pertenecen a la gráfica de una función f. Hallar f(3).

2.Si f y g son funciones cuyas reglas de correspondencia $f(x)=ax-3,\ g(x)=2x+b,$ y si $(3,3)\in G(f)$ **y** $(2,2)\in G(g)$**, calcular el valor de** $f\left[g(3)\right]-g\left[f(0)\right]$**.**

3. Si $f(2x-1)=4x+6$ **calcular** $\dfrac{f(2)-4f(3/7)}{f(3)}$

4.Si $g:A\to B$ **es una función cuya regla de correspondencia es** $g(x)=\dfrac{x}{2}-1$ **y Rang (g) = IR⁺. ¿Cuál es el dominio de g?**

5. determinar en forma analítica y en forma gráfica cuales de las siguientes relaciones de IR en IR son funciones :

a) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y=x^2-2x+3\}$

b) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x=\sqrt{y}\}$

c) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=x\}$

d) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(y+4)^2=-2x+6\}$

e) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/xy>1\}$

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

2.5.1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Definición 2.11. **La función** $f:A\to B$ **se llama función de valor real de una variable real, o función real de variable real, si tanto A como B son subconjuntos de IR.**

Observación 2.11 **En algunos casos de funciones reales de variable real cuya regla de correspondencia es** $y=f(x)$ **no se especifica su dominio, entonces se conviene que** $Dom(f)$ **es el conjunto formado por todos los valores de la variable x que posibilitan un valor real para** $f(x)$

Ejemplo 1. **Dada; la función** $f:[0,4]\rightarrow\mathbb{R}$ **tal que** $f(x)=x^2-2x+6$ **hallar el dominio, rango y grafica de f**

Solución
$f(x)=x^2-2x+6,\quad f(x)$ existe $\forall x\in[0,4]$ **Luego** $\mathrm{Dom}(f)=[0,4]$

Para hallar $\mathrm{Ran}(f)$**, completando cuadrado en x como** $f(x)=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$ **como** $\mathrm{Ran}(f)=\{y\in\mathbb{R}\,/\,\exists x\in[0,4]\wedge y=f(x)\}$**, entonces**

$$0\le x\le 4\Rightarrow -1\le x-1\le 3\Rightarrow 0\le(x-1)^2\le 9$$
$$\Rightarrow 5\le(x-1)^2+5\le 14$$
$$\Rightarrow 5\le f(x)\le 14$$

Por tanto $\mathrm{Ram}(f)=[0,14]$

Ejemplo 2. **Si f : IR →IR⁺ tal que** $f(x)=\dfrac{4-x}{2x+6}$**; hallar el dominio de f.**

Ejemplo 3
Si $f:\mathbb{R}\rightarrow[0,8],\quad$ y $f(x)=\sqrt{9-|x|}-2$ **determinar el dominio de f;**

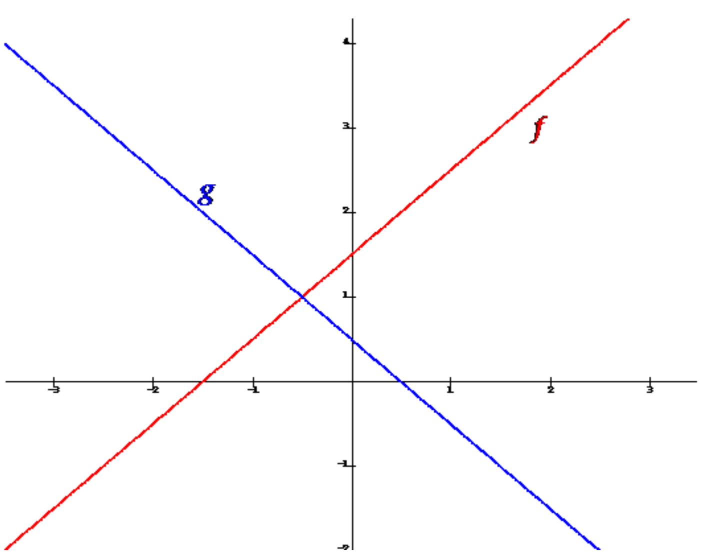
Ejemplo 4. **Determinar el dominio de f, si** $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+2x-3)\sqrt{x+4}}$ **y** $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

2.5.3 FUNCIONES ELEMENTALES
Algunas funciones reales de variable real que aparecen con frecuencia en el cálculo son estudiadas a continuación.

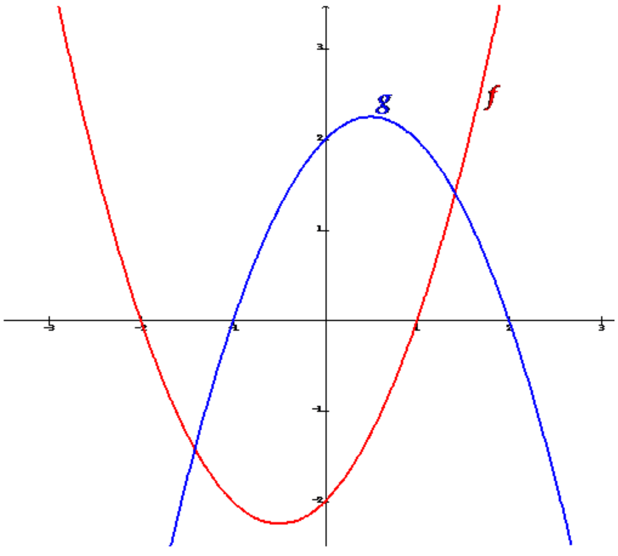
Definición 2.12 (Función lineal afín**). La función f :IR → IR con regla de correspondencia.** $f(x)=mx+b$ **; donde m , b ∈IR son constantes reales fijas, se llama función lineal afín. El dominio y el rango de una función afín es IR y su gráfica es una recta con pendiente m y ordenada al origen b.**

a)Si m = 1 y b = 0 entonces $f(x)=x\,(\text{ó } y=x)$ **se llama** función identidad**.**

Se acostumbra denotar con $I(x)=x$ **y su gráfica es la recta que pasa por el origen de la coordenadas y divide al I y III cuadrante en dos regiones simétricas con respecto a dicha recta.**
b) Si m = 0, entonces la función f(x) = b se llama función constante**, además Dom(f) = IR y Ran (f) = {b} y su gráfica corresponde a la recta horizontal ubicada b unidades de origen.**



Definición 2.13 **(**Función cuadrática**) Una función f :IR → IR tal que** $f(x)=ax^2+bx+c$**, donde** $a \neq 0, b$ y c **son constantes reales, se llama <u>función cuadrática</u>. Su grafica es la parábola cuyo vértice es el punto** $v\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$□$\text{Dom } f =$□ y $\text{Ran}(f) \subset$□



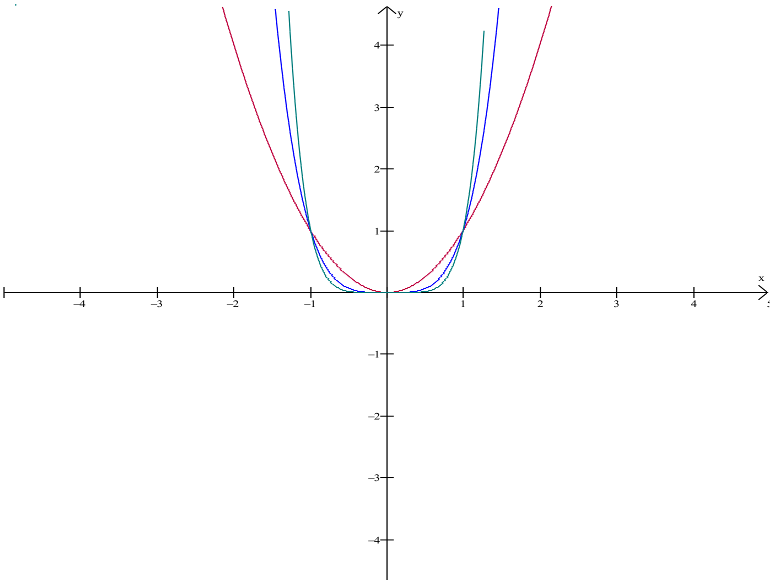
Observaciones 2.12 **Para graficar una parábola es conveniente conocer el vértice , el valor de a y las intersecciones con los ejes coordenados, si existen.**

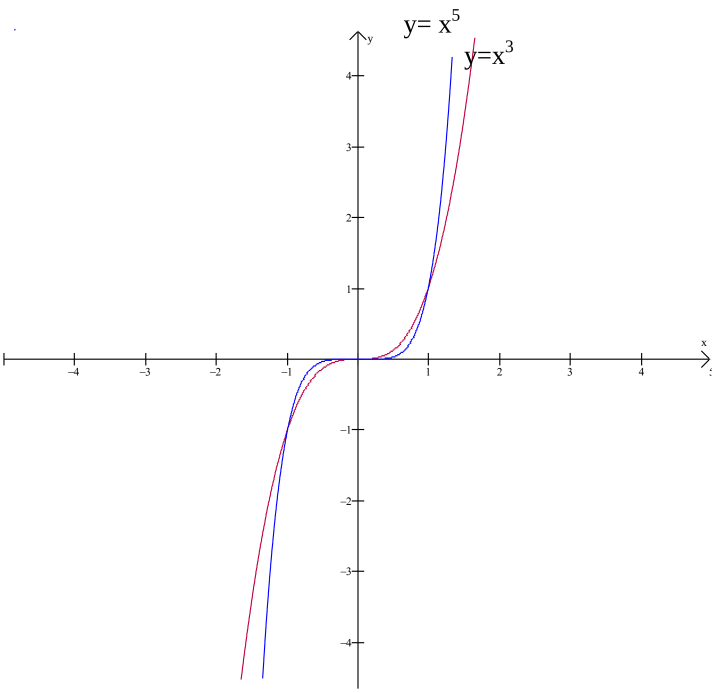
Ejemplo 6 **Determinar** $\text{Dom}\, f, \text{Ran}(f)$ **y graficar la función cuya regla de correspondencia es** $f(x)=8x-2x^2$

Definición 2.14 **(**Función potencia**) Una función f :IR → IR definida por** $f(x)=x^n$ **, donde n es un valor constante, se llama** función potencia**. El dominio y el rango de la función son subconjuntos de IR cuya determinación depende de n.**

Si n∈ IR⁺ ‚ Dom(f) = IR y Ran (f) = IR₀⁺ ; si n es par, pero $\text{Ran}(f)=$□ **si n es par.**
Si n es par, la gráfica de f es similar a la gráfica de la parabólica $y=x^2$ **; mientras que si n es impar la gráfica de** $y=x^n$ **es similar a la de** $y=x^3$**, Observando que en todos los casos la curva se ensancha para valores correspondientes a** $x \in [-1,1]$ **y se eleva para** $|x|>1$ **conforme crece el valor de n.**

$y=x^6$ $y=^4$
$y=x^2$





Observaciones 2.14

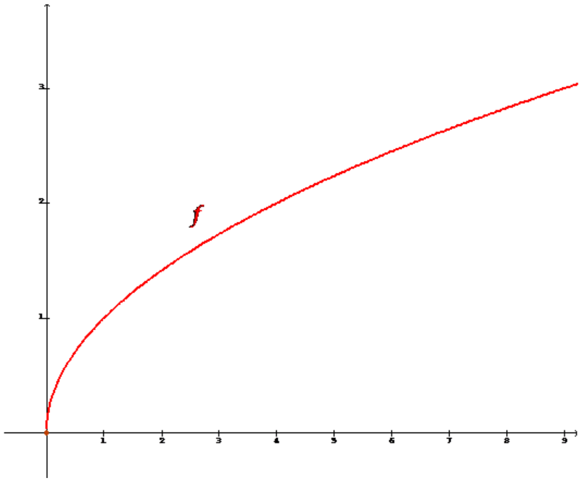
1) **La gráfica de f :IR → IR tal que** $f(x) = x^3$ **se llama** parábola cúbica**.**

2)Cuando $n = \frac{1}{k}$ **donde k ∈ IR ⁺, la función potencia** $f(x) = x^{\frac{1}{k}}$ **se llama** función raíz de índice k

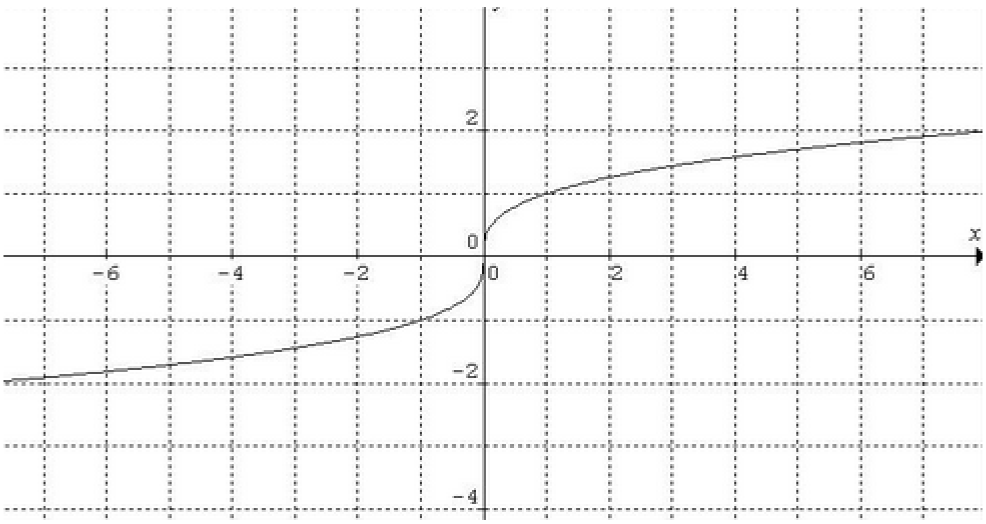
Definición 2.15 (Función raíz cuadrada y raíz cúbica)

a) f :IR⁺ → IR tal que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ **se llama** función raíz cuadrada**; su gráfica es la rama superior de la parábola** $y^2 = x$

b) f :IR → IR, con $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **se llama** función raíz cúbica



$Y = x^{1/2}$



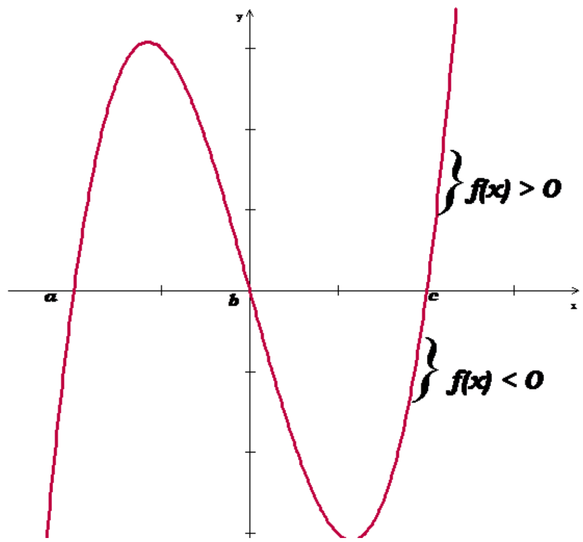
$Y=x^{1/3}$

<u>Definición 2.15</u> (Función polinómica) **Una función f :IR → IR se llama función polinómica de grado n, cuando**

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$$

donde, n es un número entero no negativo y los números reales $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$**, con** $a_n \neq 0$ **son constantes llamadas coeficientes del polinomio. Simbólicamente,**

Nota.- **r ∈ IR es un cero de la función polinómica f si** $f(r)=0$. **En la gráfica los ceros de f son las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica con el eje x.**



Ejemplo 7 **Encontrar los ceros de la función f definida por :**

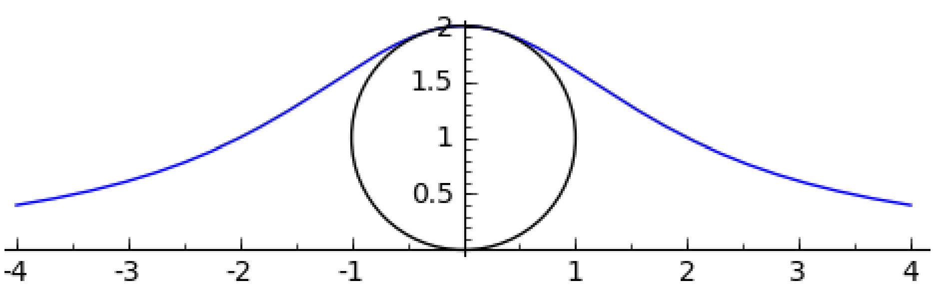
a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$

b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$. **Bosquejar la gráfica de ambas funciones.**

Definición 2.16 **(** Función Racional **) Si P y Q son polinomios en x, A es un subconjunto de IR, la función f : A → IR cuya regla de correspondencia es** $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$**, donde** $A = \mathrm{Dom}(f)$ **= { x ∈ IR / Q(x) ≠ 0 }.**

Un ejemplo de función racional es $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$. **Su gráfica se llama** hipérbola equilátera .

otro ejemplo es la función $f : \mathbb{R} \to \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$ **tal que f(x) = a²/(x²+a²) Dom(f) = IR cuya gráfica es llamada** Bruja de Agnesi



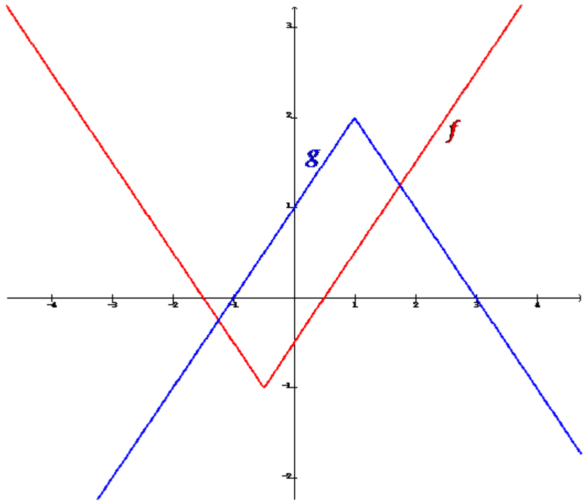
Definición 2.17 **(**<u>Función valor absoluto</u>**) La función f : IR → IR con regla de correspondencia** $f(x) = |x|$ o $y = |x|$ **se llama** función valor absoluto**. Su dominio es IR.**

Como $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \wedge y = |x|$ **entonces** $y \geq 0$**, es decir** $\mathrm{Ran}(f) = [0, +\infty[$

De la definición de valor absoluto, se tiene $f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Se observa que la regla de correspondencia de f se divide en dos reglas cada una sobre un dominio especifico. A estas funciones se les llama función definidas por secciones **o** funciones seccionadas**.**

Para graficar $f(x)=|x|$ se considera que $f(x)=x$ si $x\geq 0$, esto significa que la gráfica de f que se encuentra a la derecha del cero es la recta $y=x$, mientras que si $x<0$, se tiene $f(x)=-x$, la gráfica de f que se encuentra a la izquierda del cero es la recta $y=-x$



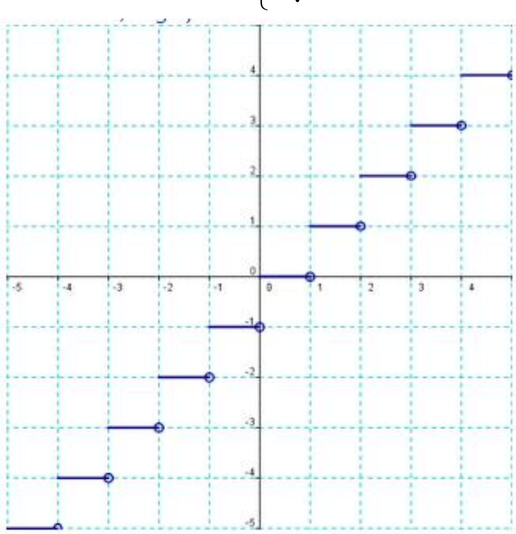
Ejemplo 8 **Graficar f si** $f(x)=x+|x-1|$

Ejemplo 9 **Trazar la gráfica de la función definida por**

$$f(x)=\begin{cases} |x|, & \text{si } x\in[-1,1[\\ -2x+8, & \text{si } x\in[1,4[\\ 21-x^2, & \text{si } x>4 \end{cases}$$ **y determinar el Dominio y el rango de f**

Definición 2.18 (Función máximo entero). **La función f: IR →ℤ tal que f(x) = ⟦ x ⟧ se llama función máximo entero, donde Dom (f) = IR**

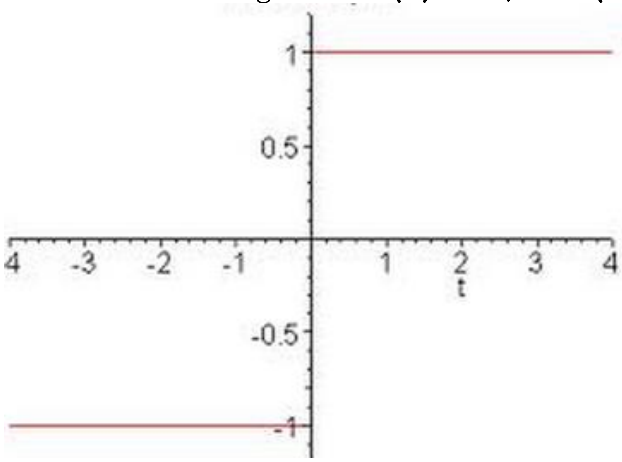
$$f(x)=[x]\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} \vdots \\ -2, \text{ si } -2\leq x<-1 \\ -1, \text{ si } -1\leq x<0 \\ 0, \text{ si } 1\leq x<1 \\ 1, \text{ si } 1\leq x<2 \\ 2, \text{ si } 2\leq x<3 \\ \vdots \end{cases}$$



Definición 2.19 (Función signo). **La función f: IR →{ -1 , 0 1 } con regla de correspondencia.**

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{si } x>1 \\ 0, \text{si } x=0 \\ -1, \text{si } x<1 \end{cases}$$

se llama función signo. **Dom (f) = IR , R an (f) = { -1 , 0 , 1 }Se denota por el sgn (f)**



2.5.4 TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

La gráfica de una función puede trasladarse en forma vertical u horizontal, estirarse o comprimirse en forma vertical u horizontal o reflejarse con respecto a los ejes coordenados; al sumar, restar, multiplicar o dividir a x o a f(x) una constante real.

TRASLACIONES HORIZONTALES Y VERTICALES **Si** $y=f(x), k>0$ **, para obtener la gráfica de:**

1) $y=f(x)+k$ **, se desplaza la gráfica de** $y=f(x), k$ **unidades hacia arriba**
2) $y=f(x)-k$ **, se desplaza la grafica de** $y=f(x), k$ **unidades hacia abajo**
3) $y=f(x-k)$ **, se desplaza la gráfica de** $y=f(x), k$ **unidades hacia la derecha**
4) $y=f(x+k)$ **, se desplaza la gráfica de** $y=f(x), k$ **unidades hacia la izquierda**

TRANSFORMACIONES DE TAMAÑO Y REFLEXIONES **Si** $y=f(x), k>1$ **para obtener la gráfica de :**

1) $y=kf(x)$ **, se estira la gráfica de** $y=f(x)$ **verticalmente en un factor k**
2) $y=\frac{1}{k}f(x)$ **, se comprime la gráfica de** $y=f(x)$ **verticalmente k.**
3) $y=f(kx)$ **, se comprime la gráfica de** $y=f(x)$ **horizontalmente en un factor k.**
4) $y=f\left(\frac{1}{k}x\right)$ **, se estira la gráfica de** $y=f(x)$ **horizontalmente en un factor k.**
5) $y=-f(x)$ **, debe reflejarse la gráfica de** $y=f(x)$ **con respecto al eje x.**
6) $y=f(-x)$ **, debe reflejarse la gráfica de** $y=f(x)$ **con respecto al eje y.**

Ejemplo 11 **Dada la gráfica de** $y=|x|$ **graficar**

a) $y=|x-3|$ **b)** $y=|x|-3$ **c)** $y=|x+2|+1$ **d)** $y=3|x-2|$ **e)** $y=-\left|\frac{1}{2}x\right|$

Definición 2.20 **La función f : A → IR ; donde A es un subconjunto no vacio de IR, se llama** función algebraica **si** $f(x)$ **puede expresarse en términos de un número finito de operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división, radicación) a partir de polinomios.**

Ejemplo 14 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^4+6}-(x+1)^3$ **son funciones algebraicas.**

Nota **Las funciones que no son algebraicas se llaman** trascendentes; **entre ellas se encuentran las funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, hiperbólicas y sus inversas**

Ejemplo 16 **Graficar : a)** $f(x)=-\mathrm{sgn}(x-3)$ **b)** $h(x)=\left|x^2-2x-3\right|$, **c)** $k(x)=\left|\sqrt{|x|-[x]}\right|$

2.5.5 FUNCIONES PARES E IMPARES

Definición 2.21
Una función f: A → IR donde A ⊆ IR, es par, si $\forall x,-x\in A$ **se cumple que** $f(-x)=f(x)$
Geométricamente se reconoce que una función es par cuando su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Ejemplo 17 **La función f: IR → IR definida por el** $f(x)=x^6$ **es par, pues ∀ x , -x ∈ IR se tiene** $f(-x)=(-x)^6=x^6=f(x)$

Definición 2.22 **Una función** $f:A\to\mathbb{R}$ **, donde** $A\subseteq\mathbb{R}$ **es impar si** $\forall x,-x\in A$ **, se cumple:**

$$f(-x)=-f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas; es decir la gráfica total de f se obtiene haciendo girar 180° alrededor del origen la gráfica de f para $x\geq 0$.

Ejemplo 18 **La función f: IR → IR, tal que** $f(x)=x^3$ **es impar, porque**

$$f(-x)=(-x)^3=-(x^3)=-f(x)$$

Por tanto $f(-x)=-f(x)$.**La gráfica de f es simétrica con respecto al origen de coordenadas**

Ejemplo 19 **Determinar cuales de las siguientes funciones son pares; impares o ninguno de esos tipos**

a) $f(x)=2x^4-5|x|+4x^2-3;\ \forall x\in\mathbb{R}$
b) $g(x)=x^3+4x, \text{si } x\in\mathbb{R}$
c) $h(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x<1 \\ x^2-2x+3, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

2.5.6 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES
Definición 2.23 **f: IR → IR es una función creciente sobre un intervalo I,** $I\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ **si** $\forall x_1,x_2\in,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Definición 2.24 **f: A → IR es una función decreciente sobre un intervalo I,** $I\subseteq \mathrm{Dom}(f)$
si $\forall x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Nota **Si una función es creciente o decreciente sobre I se dice que f es** monótona **en I**
Observación 2.15 **f es creciente en I si** $\forall x_1,x_2\in I$, $f(x_1)-f(x_2)<0, \text{si } x_1<x_2$
Análogamente f es decreciente en I si $\forall x_1,x_2\in I$, $f(x_1)-f(x_2)>0$, **cuando** $x_1<x_2$

Ejemplo 20 **La función definida por** $f(x)=x^2$ **es creciente en el intervalo** $]0,+\infty[$ **; puesto que :**

a) **Si** $x_1 > 0, x_2 > 0 \ \wedge \ x_1 < x_2$

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$ **, luego** $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$**, es decir**

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Por tanto f es creciente en $]0, +\infty[$

b) **Si** $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0$ **entonces** $-x_1^2 < -x_1x_2 \wedge -x_1x_2 < -x_2^2$

$\Rightarrow -x_1^2 < -x_2^2$ **. Luego** $x_1^2 > x_2^2$

Luego $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Por consiguiente f es decreciente en $]-\infty, 0[$

<u>Ejercicios</u>

1. **Si** $f(x) = \begin{cases} -x & x < -1 \\ x^2 + 3x - 1, & -1 \le x < 5 \\ 7 - 2x, & x \ge 4 \end{cases}$

Hallar

a) $f(-3)$ **b)** $f(2)$ **c)** $f(0)$ **d)** $f(6)$

2. **Si** $f(x) = \sqrt{x+3}$ **hallar** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \ne 0$

3. **Si** $f(x-2) = g(x^2)$ y $g(x+4) = |x| + \sqrt{x-2} - \dfrac{3}{x+1}$ **. Hallar** $f(x)$

4. **Determinar el dominio de la función definida por :**

a) $f(x) = |x| + 3$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x| - 1}{x^2 - 4}}$

e) $f(x) = \sqrt{2 - x^2 + x}$

5. **Hallar el** $\text{Dom}(f)$ **si**

a) $f(x) = \sqrt{1-x}$ **,** $\text{Ran}(f) = [1, 3[$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}, \text{Ran}(f) =]-\infty, -2]$

c) **Si** $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+6)}{(x^2+x)(x^2-4)}, \ \text{Ran}(f) = \mathbb{R}^+$

6. **Determinar** $\text{Ran}(f)$ **si**

a) $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$

b) $f(x) = \sqrt{x-3}, \ \text{Dom}(f) = [4, 9]$

c) $f(x)=\dfrac{x+2}{4x^2-5}$, $\text{Dom } f=[10,+\infty[$

d) $f(x)=\sqrt{|x|-2}$, $\text{Dom } f=]2,+\infty[$

7. **Encontrar el conjunto de los números reales donde** $f(x)>0$ **si:**

a) $f(x)=(x^2+x+3)$

b) $f(x)=\dfrac{x}{2x^2-1+3x}$

8. **Hallar** $\text{Dom}(f)$ **y graficar**

a) $f(x)=|x|+3$

b) $f(x)=\sqrt{x-1}+5$

c) $f(x)=x^2-2x+7$

d) $f(x)=|x-1|+|2x+5|$

e) $f(x)=x+[x]$

f) $f(x)=\sqrt{|x|+[x]}$

g) $f(x)=\left[\dfrac{2}{3}x+2\right]$

h) $f(x)=\begin{cases} x^{2/3}, & \text{si } x\geq 0 \\ -x^3+4, & \text{si } x<0 \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} |2x-x^2|, & \text{si } x\neq -1,\ x\leq 4 \\ |x+1|+|x-5|, & \text{si } x>5 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} 2x, \text{ si } x>1 \\ \sqrt{1-|x|}, \text{ si } |x|\leq 1 \\ [x+3], \text{ si } -5\leq x<-1 \end{cases}$

9. **Identificar el tipo de función elemental al que corresponde cada función dada:**

a) $f(x)=2x+3$

b) $f(x)=x^2+4x^5-8x$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x-4}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+6}$

e) $f(x)=3x^2-8$

f) $f(x)=3x+\dfrac{x^2}{\sqrt{x+4}}$

10. **Explicar como se obtiene gráfica de g a partir de la gráfica de** $y=f(x)$

a) $g(x)=4f(x)$
b) $g(x)=f(x+3)$
c) $g(x)=-2f(x-1)$
d) $g(x)=-4f(x+2)+3$

12. **Si** $y=f(x)$**, graficar**
a) $y=f(x+2)$
b) $y=2f(x)+3$
c) $y=-f(x-1)+3$

13. **A partir de la gráfica de f, dibujar la gráfica de g**

a) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{9-x}\quad ; g(x)=\sqrt{2x+1}+3$
b) $f(x)=x^{2/3},\ g(x)=-(x-1)^{2/3}$
c) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=\dfrac{4}{x-2}\quad ; g(x)=\dfrac{1}{x}+2$
d) $f(x)=x^{1/3},\ g(x)=(x+4)^{1/3}-5$

14. **Se da la gráfica de f**

$f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

Hallar Dominio, rango y graficar
a) $2f(x+3)$ **b)** $f(-2x)+4$ **c)** $-f(x-1)+2$

15. **Determinar si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Además si son crecientes o decrecientes en su dominio.**

a) $f(x)=x^3+x$
b) $f(x)=x^3-2x^2$
c) $f(x)=(-x)^{2/3}$
d) $f(x)=x^{-3}+x^{-2}$
e) $f(x)=\dfrac{t}{t+2}$
f) $f(x)=6|x|-3x^2+5$
g) $f(x)=|x|^3-\dfrac{4}{x^2-1}$
h) $f(x)=\dfrac{1}{x}$
i) $f(x)=\sqrt{|x|}$

17. **Definir cada uno de las siguientes funciones por secciones y graficarlas**

a) $f(x)=\dfrac{1}{|x|-4}$ **b)** $f(x)=|x^2-9|+9$ **c)** $f(x)=\sqrt{|x|-y}$